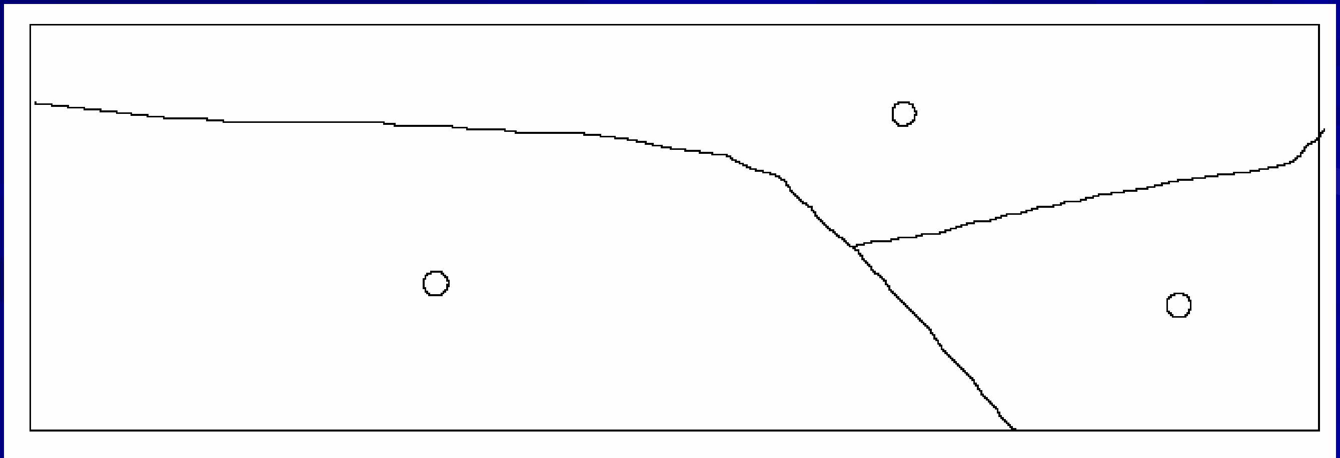
Redes Hopfield

Adriano Martins Moutinho

Redes Neurais I

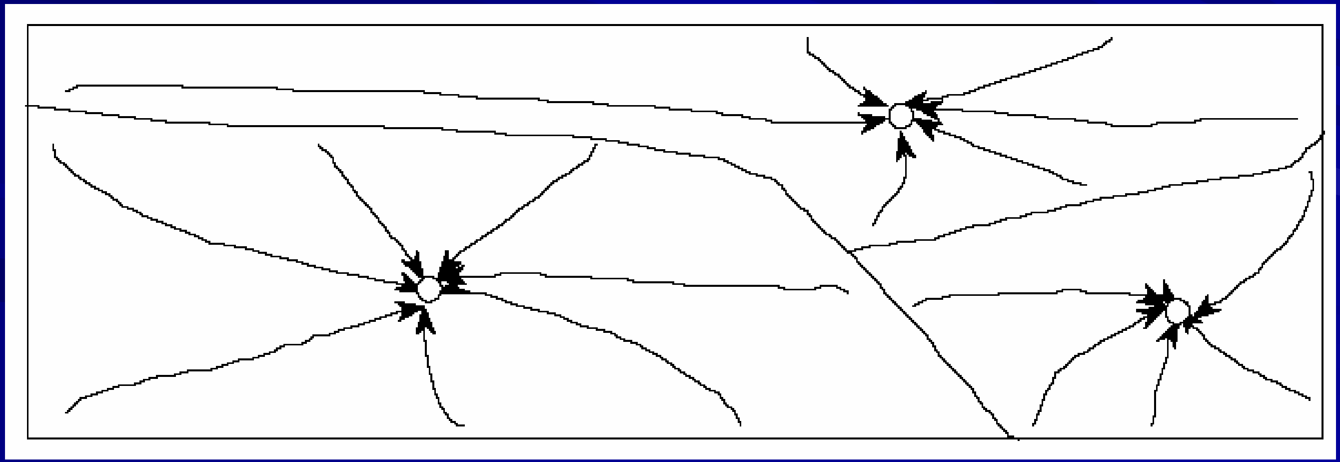
Redes Hopfield

- Usada para classificação ou clusterização.
- Possui recorrência, ou seja, uma saída é realimentada à entrada.
- A rede hopfield funciona como um mapa que divide um certo espaço de dados *N* em *m* partes.



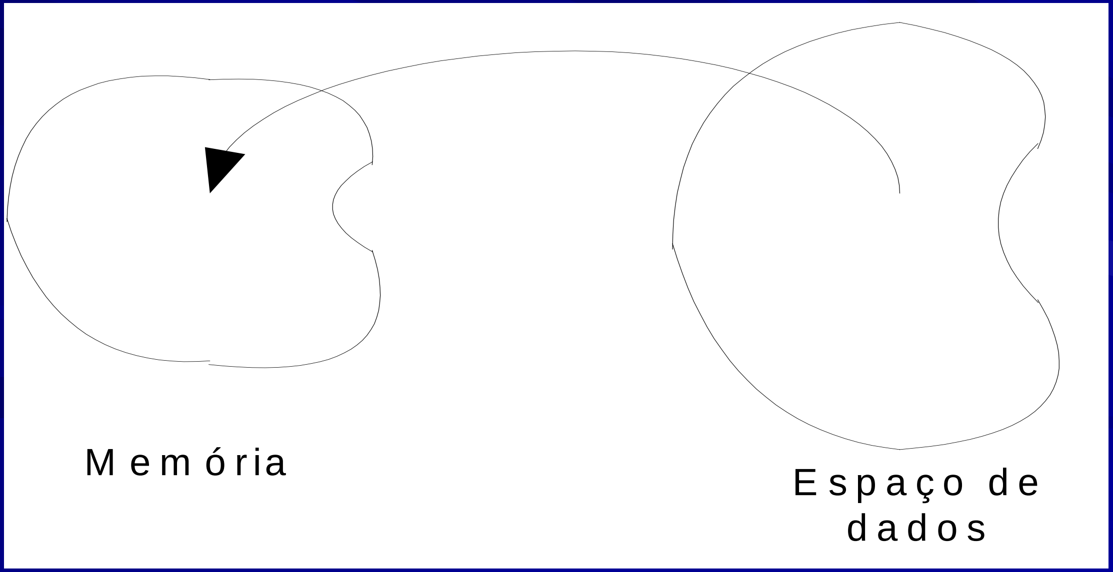
Redes Hopfield

- Assim, dado um certo espaço de dados e um conjunto de pontos *P*, A rede Hopfield ajustará seus pesos de forma a possibilitar que todos os pontos no espaço de dados convirjam para os indicados.



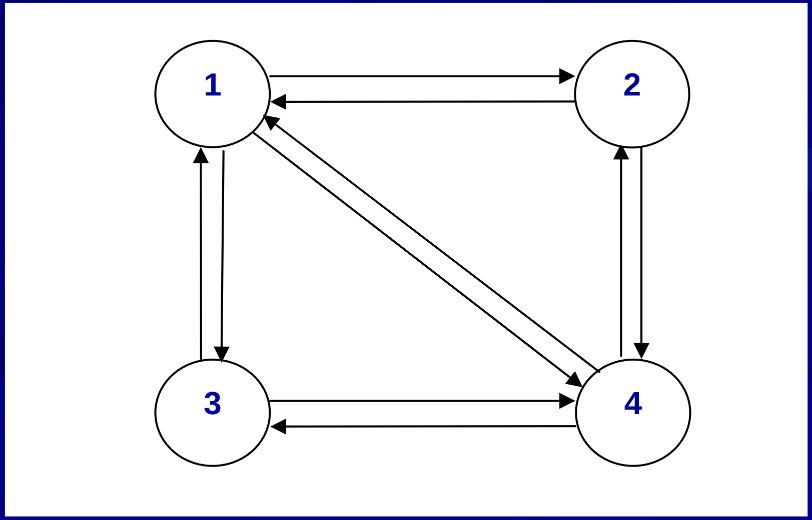
Redes Hopfield

- A rede Hopfield pode ser vista também como uma memória associativa, ou seja, dado um padrão ruidoso ou deformado, a rede tentará encontrar o padrão original guardado.



Estrutura de uma rede Hopfield

- A rede Hopfield é um arranjo simétrico e interconectado de neurônios com recorrência em todos eles, ou seja, cada neurônio é uma saída e ao mesmo tempo se liga com outros neurônios de saída.



Treinamento:

- Assim, o treinamento de uma rede hopfield se resume a encontrar os pesos que permitem fazer todo o espaço de dados convergir para um dos pontos desejados. Sendo a saída da r
- O valor de net (antes da função de propagação) é dado por:

$$net_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} w_{ij} x_j + \theta_i$$

Treinamento:

- Os neurônios de uma rede Hopfield são neurônios formais de McCulloch e Pitts, ou seja, possuem função de ativação “Hard-limit”, possuindo apenas valores –1 e 1.

$$y_i = \varphi\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} w_{ij} x_j + \theta_i\right)$$

$$\varphi = (\text{"}Hard - Limit\text{"})$$

Treinamento:

- A matriz de pesos que permite convergir todo o espaço de dados pode ser encontrada com apenas um passo, usando a equação abaixo, o postulado de aprendizado de Hebb.

$$w_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{p} \xi_{\mu,j} \cdot \xi_{\mu,j}$$

$$W = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{p} \xi_{\mu} \ \xi_{\mu}^{T} - \frac{p}{N} I$$

Treinamento:

- A matriz de pesos tem as seguintes propriedades, devido as características da rede Hopfield.

$$w_{ij} = w_{ji} \ \forall i \ e \ \forall j \ (simetria)$$

$$w_{ii} = 0 \ \forall \mathrm{i} \ \ (não \ há \ auto\text{-}recorrência)$$

Fase de testes

- Na fase de teste, um determinado vetor distorcido ou ruidoso *p* é imposto à rede. O objetivo da rede é convergir para o ponto mais próximo da memória associativa.
- Para isso, um processo iterativo é executado. A cada iteração um neurônio é escolhido aleatoriamente e tem sua saída calculada e imposta à função de propagação.

Exemplo:

- Caso seja requerido uma rede que convirja para os pontos:

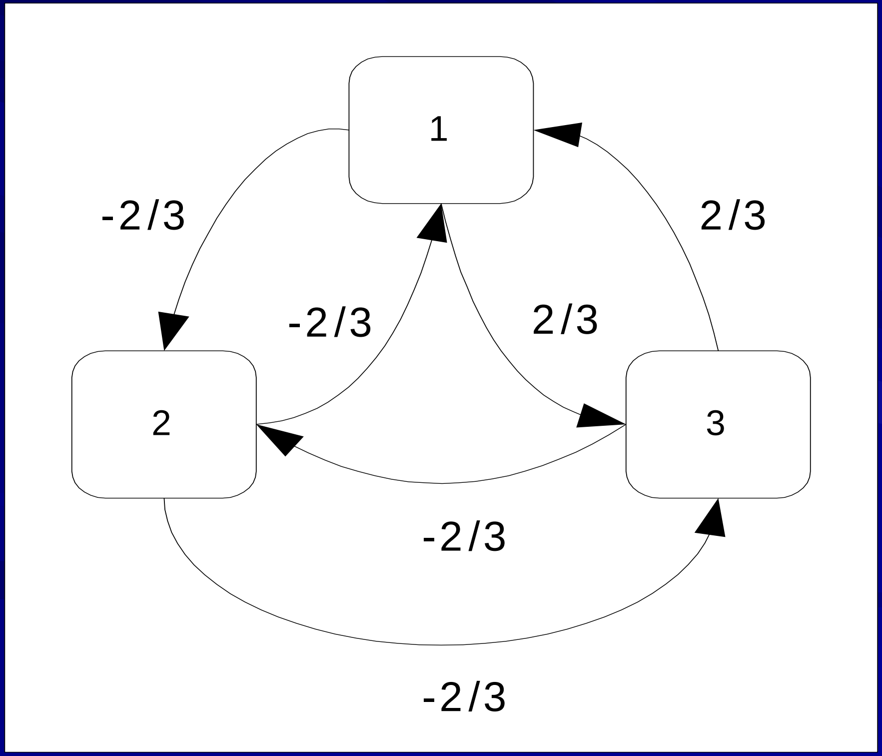
$$\xi_1 = [+1\ \text{-}1\ +1]$$
$$\xi_2 = [\text{-}1\ +1\ \text{-}1]$$

$$W = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{p} \xi_\mu\ \xi_\mu^T - \frac{p}{N} I$$

$$W = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo:

- Assim, a rede Hopfield seria conforme mostrada abaixo:



Conceito de energia de uma rede Hopfield

- Se os neurônios fossem cargas magnéticas e os pesos definissem a força da iteração, a energia do sistema seria:

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_{ij} s_i s_j \quad s = estado\ de\ ativação$$

- Assim, o processo de convergência minimiza a energia E, procurando por um mínimo...

Conceito de energia de uma rede Hopfield

- No caso da rede Hopfield do exemplo teremos a função energia como:

$$E = \frac{2}{3}(s_1 s_2 - s_2 s_3 + s_1 s_3)$$

$$s_1 s_2 s_3 \rightarrow \textit{estados dos neurônios}$$

$$\begin{array}{lll}
-1 & -1 & -1 \rightarrow E = 2/3 \\
+1 & -1 & -1 \rightarrow E = 2/3 \\
-1 & +1 & -1 \rightarrow E = -2 \\
+1 & +1 & -1 \rightarrow E = 2/3 \\
-1 & -1 & +1 \rightarrow E = 2/3 \\
+1 & -1 & +1 \rightarrow E = -2 \\
-1 & +1 & +1 \rightarrow E = 2/3 \\
+1 & +1 & +1 \rightarrow E = 2/3
\end{array}$$

- Assim, o processo de convergência minimiza a energia E, procurando por um mínimo...

Estados espúrios

- Como a função de energia é minimizada durante o processo de simulação. É possível surgir estados espúrios ou intermediários.
- Dessa forma, existem erros da rede Hopfield em relação aos estados espúrios e aos erros propriamente ditos.

Máximo número de elementos armazenados (pontos de convergência)

- Segundo *amid* [1989], o máximo número de elementos armazenados em uma rede hopfield, para possibilitar que a maioria dos pontos sejam armazenados corretamente:

$$p_{\max} \approx \frac{N}{2\ln(N)}$$

- Se for requerido que mais de 99% dos pontos sejam armazenados corretamente:

$$p_{\max} \approx \frac{N}{4\ln(N)}$$